

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2025

Mecânica Estatística

05/08/2025 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – TERMODINÂMICA DA RESPIRAÇÃO

Durante a respiração, os pulmões realizam ciclos de expansão e compressão que, em primeira aproximação, podem ser descritos como processos termodinâmicos quase-reversíveis. Considere um modelo idealizado no qual o sistema realiza um “ciclo de Carnot reverso”, caracterizando um refrigerador de Carnot: o sistema consome trabalho líquido para transferir calor da atmosfera para o corpo, às temperaturas $T_{\text{atm}} = 293 \text{ K}$ e $T_{\text{corp}} = 310 \text{ K}$, respectivamente. Considere o ar como um gás ideal, com $\gamma = C_p/C_v \approx 1,4$, e à pressão atmosférica $P_{\text{atm}} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$.

- (a) (30%) Obtenha a expressão para o trabalho W realizado por um gás ideal em uma expansão adiabática reversível entre os volumes V_1 e V_2 , sabendo que a pressão inicial do gás é P_1 .
- (b) (25%) Considere a etapa de inspiração como um processo adiabático reversível com volume inicial $V_1 = 0,5 \text{ L}$ à pressão atmosférica e volume final $V_2 = 6,0 \text{ L}$.
 - i) (15%) Estime a ordem de grandeza do trabalho realizado, ou seja, estime o valor de p em $W \sim 10^p \text{ J}$.
 - ii) (10%) Estime a variação da energia interna do gás.
- (c) (15%) Estime o rendimento térmico ideal de um ciclo de Carnot operando entre as temperaturas $T_{\text{atm}} = 293 \text{ K}$ e $T_{\text{corp}} = 310 \text{ K}$.
- (d) (30%) Em um organismo real, a inspiração e a expiração são processos irreversíveis. Considere os seguintes dados experimentais: o trabalho total realizado durante a inspiração é $W_{\text{insp}} = 0,5 \text{ J}$; o calor dissipado de forma irreversível, à temperatura $T_{\text{corp}} = 310 \text{ K}$, durante a expiração é $Q_{\text{irr}} = 0,1 \text{ J}$.
 - i) (15%) Calcule a variação de entropia total associada à irreversibilidade do processo.
 - ii) (15%) A “eficiência biofísica” do ciclo respiratório pode ser definida como a razão entre o trabalho realizado e o calor *útil* convertido durante a inspiração. Suponha que o calor convertido seja aproximadamente $Q \approx 1,3 \text{ J}$. Calcule essa eficiência, compare com o rendimento de Carnot obtido no item (c) e discuta as razões da diferença observada.

FORMULÁRIO: $(0,0005)^{1,4} \approx 2,4 \times 10^{-5}$, $(0,0005)^{0,4} \approx 4,8 \times 10^{-2}$, $(0,006)^{1,4} \approx 7,8 \times 10^{-4}$, $(0,006)^{0,4} \approx 1,3 \times 10^{-1}$, $(12)^{-0,4} \approx 3,7 \times 10^{-1}$.

QUESTÃO 2 – FORMALISMO CANÔNICO

Um sistema estatístico tem densidade de estados por unidade de energia dada por

$$g(\epsilon) = g_0(e^{\epsilon/\epsilon_0} - 1),$$

onde ϵ é a energia, e g_0 e ϵ_0 são constantes positivas.

- (a) (30%) Calcule a função de partição Z do sistema. Para quais valores da temperatura temos que Z é bem definida (isto é, uma função com valor positivo finito)?
- (b) (50%) Calcule a energia média $U = \langle \epsilon \rangle$, a entropia S e o calor específico C_v como funções da temperatura.
- (c) (20%) Um segundo sistema, com calor específico alto, mas finito, pode servir de reservatório térmico se mudanças de sua energia interna não resultam em mudanças significativas da temperatura. Suponha que este sistema, inicialmente à temperatura T_H , é colocado em contato térmico com o sistema considerado nos itens anteriores. Qual será, aproximadamente, a temperatura de equilíbrio do sistema se $T_H \gg \epsilon_0/k_B$? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 3 – FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ESTATÍSTICA QUÂNTICA: MATRIZ DENSIDADE

Considere um sistema quântico composto de uma partícula de spin $1/2$ que pode ocupar dois estados de energia distintos: $E_1 = 0$ e $E_2 = \epsilon$. O sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura T e é descrito por uma matriz densidade ρ , segundo a estatística de Boltzmann.

- (a) (30%) Determine a matriz densidade ρ do sistema em equilíbrio térmico a uma temperatura T , expressando-a como função de $\beta = 1/(k_B T)$ e ϵ .
- (b) (30%) Usando a matriz densidade obtida no item anterior, calcule o valor esperado da energia $\langle E \rangle$ do sistema como função de β e ϵ .
- (c) (40%) Suponha que o observável \hat{O} representando a posição da partícula seja dado por

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix},$$

onde $x_1 = 0$ m e $x_2 = 1$ m correspondem às posições associadas aos estados $E_1 = 0$ e $E_2 = \epsilon = 1$ eV, respectivamente. Considere que a temperatura seja $k_B T = 1$ eV. Estime o valor esperado da posição $\langle \hat{O} \rangle$ do sistema em equilíbrio térmico.

QUESTÃO 4 – MODELO DE ISING EM UMA DIMENSÃO

O modelo de Ising em uma rede periódica unidimensional, consiste de uma cadeia fechada de N spins s_1, \dots, s_N , onde cada spin interage apenas com seus primeiros vizinhos. Cada s_k pode assumir dois valores, $+1$ e -1 , e a energia da configuração (s_1, \dots, s_N) é

$$E = -J \sum_{k=1}^N s_k s_{k+1},$$

onde $s_{N+1} = s_1$, condições de contorno periódicas.

- (a) (20%) Calcule a função de partição $Z(T, N)$ e a magnetização $M(T, N) = \langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s_k \rangle$ do sistema, para $N = 3$ e $N = 4$.
- (b) (20%) Ache λ tal que $Z(T, 3)$ e $Z(T, 4)$ obtidas no item anterior possam ser, *ambas*, expressas na forma

$$Z(T, N) = \text{Tr}(\Lambda^N),$$

onde Λ é a *matriz de transferência* 2×2 :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Mostre que, então,

$$M(T, N) = \text{Tr}(\sigma_3 \Lambda^N), \quad \text{onde } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

para $N = 3, 4$.

- (c) (20%) Ache os dois autovalores λ_1 e λ_2 para a matriz de transferência Λ .
- (d) (20%) Pode ser mostrado que as equações acima são válidas, não apenas para $N = 3$ e $N = 4$, mas para para todo N . Use esse fato para calcular a energia livre por spin e a magnetização, no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$.
- (e) (20%) Há magnetização espontânea neste modelo? Justifique sua resposta.